



Munich Personal RePEc Archive

# **Life Annuities Reserving in Algeria between static approach and prospective approach**

FLICI, Farid

Centre for Research in Applied Economics for Development, CREAD

6 November 2015

Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/91917/>

MPRA Paper No. 91917, posted 05 Feb 2019 14:16 UTC

# PROVISIONNEMENT DES RENTES VIAGERES EN ALGERIE ENTRE APPROCHE STATIQUE ET APPROCHE PROSPECTIVE

Farid FLICI<sup>1</sup>

*Centre de Recherche en Economie Appliquée pour le Développement, CREAD<sup>2</sup>*

## Résumé :

L'espérance de vie à la naissance de la population Algérienne ne cesse de réaliser des améliorations considérables. Cette longévité combinée avec les nouvelles contraintes du marché algérien des rentes viagères ne fait que réduire l'utilité des tables de mortalité statiques et accentuent la nécessité d'utiliser les tables de mortalité prospectives pour la tarification et le provisionnement. En l'absence de données de mortalité spécifiques au marché des rentes viagères, nous proposons, dans le présent travail, de nous baser directement sur les données de la population globale afin de construire une table de mortalité prospective pour la tarification et le provisionnement des rentes viagères en Algérie. Les résultats obtenus sous l'approche prospective sont comparés à ceux obtenus sous l'approche statique des tables de mortalité.

**Mots-clefs :** Provisionnement, rentes viagères, longévité, table de mortalité statiques, table de mortalité prospectives, Algérie.

---

<sup>1</sup> Contact: farid.flici@cread.edu.dz

<sup>2</sup> Rue Djamel Eddine El-Afghani- El Hammadia BP.197, Rostomia, Bouzareah – Alger, Algérie.  
Tél : +213 023 18 00 86 / +213 23 18 00 88 ext.149 - Fax : +213 23 18 00 87

## 1. INTRODUCTION

La rente viagère est un contrat s'étalant sur de longues périodes. La logique du métier veut que l'assuré doive payer la totalité de ses cotisations pour que l'assureur puisse s'engager à lui verser les prestations convenues. La distribution de l'engagement de l'assureur dans le temps est fonction de l'évolution du nombre de survivants au sein du groupe assuré. De ce fait, l'assureur est tenu de répartir le montant de la prime en fonction du risque que comporte chaque année de la période de couverture et d'évaluer périodiquement la réserve mathématique, ce qui lui permet d'honorer son engagement futur envers les rentiers.

Dans ce sens, l'utilisation des tables de mortalité est indispensable du fait qu'elles permettent à l'assureur d'estimer la fonction de survie des rentiers et, donc, la distribution de son engagement futur envers ces derniers. Les tables dites transversales (ou périodiques) retracent l'évolution d'une génération fictive en fonction de l'âge, à partir de l'observation de la mortalité d'une population durant une période restreinte qui peut s'étaler d'une année à 5 ans d'observation. L'utilisation des tables de mortalité périodiques pour la tarification et le provisionnement des rentes viagères suppose implicitement l'hypothèse de constance des taux de mortalité par âges dans le futur, une hypothèse loin d'être réaliste compte tenu de l'augmentation de la longévité.

En matière de rentes viagères, la longévité se traduit par le prolongement de la durée du service de la rente, autrement dit, l'augmentation de l'engagement de l'assureur. Selon les publications de l'Office National des Statistiques (ONS, 2015), entre 1990 et 2014, la population algérienne a gagné plus de 10 ans en espérance de vie à la naissance qui est passée de 66.9 à 77.2 ans. Le gain en espérance de vie à 60 ans a été de 6.5 ans. Cette amélioration est censée se poursuivre dans les années à venir (UN, 2015).

Dans la perspective d'évolution continue de l'espérance de vie à tous les âges, les tables de mortalité utilisées pour la tarification des produits de vie ou de décès doivent être périodiquement révisées afin de contenir les évolutions récentes du risque de décès. Pour ce qui est des rentes viagères, l'utilisation des tables de mortalité prospectives est indispensable. L'utilisation des tables de mortalité périodiques pour le calcul des rentes viagères conduit naturellement à une sous-tarification et un sous-provisionnement. Les rentes viagères sont des contrats de longue durée, au moment où les primes à payer ou les prestations à percevoir sont définies, l'assureur doit donc tenir compte du schéma d'évolution de la mortalité tout au long de la durée de couverture.

## 1.1 Comparaison avec d'autres pays

Pour les pays où le marché des rentes viagères est développé, il est permis aux assureurs de construire leurs propres tables de mortalité en se basant sur les données d'expérience de leurs rentiers. En France par exemple, à partir de 1993, on distingue les tables de mortalité à utiliser pour les rentes viagères et les tables à utiliser pour le calcul des produits d'assurance vie autre que les rentes viagères. Les rentes viagères sont, à partir du 1<sup>er</sup> janvier 1994, tarifées sur la base d'une table par génération féminine (TPG 1993) tandis que les autres contrats sont gérés sur la base de tables périodiques (TV 88-90 et TD 88-90) qui a été révisée en 2005 où de nouvelles tables ont été homologuées (TV 00-02 et TD 00-02). Dans l'année suivante, les tables générationnelles ont subi le même sort avec l'homologation de nouvelles tables par sexe (TGH 05 et TGF 05). Dans le même contexte, l'article A335-1 du code français des assurances autorise les compagnies d'assurances à établir leurs propres tables de mortalité d'expérience avec la certification d'un actuinaire agréé et indépendant.

Aux Etats-Unis, les tables publiées en 1994 (*The 1994 Uninsured Pensioners Life tables UP-94* et « *The 1994 Group Annuity Reserving Life tables GAR-94* ») offrent la possibilité de faire des projections sur la base d'une échelle d'amélioration de la mortalité « l'échelle AA ». Cette échelle a été construite sur la base de l'expérience de la mortalité du « *Civil Service Retirement System – CSRS* » observée entre 1977 et 1993 (SOA, 1995). Depuis 2000, les deux tables ont été regroupées sous la même nomination « *Retirement Plan 2000 life table : RP-2000* ». En 2014, une nouvelle version a été publiée (RP-2014) dans laquelle l'échelle de projection a été adaptée en considérant de nouvelles données (*2014 Mortality Projection : MP-2014*).

Au Canada, le manque de données spécifiques à la population des retraités a obligé les régimes canadiens de retraite à s'adosser aux tables des rentes américaines, à savoir les tables UP-94 et RP-2000, et ce jusqu'au 1<sup>er</sup> Octobre 2015 où l'utilisation d'une table spécifique aux retraités canadiens est entrée en vigueur pour tous les calculs des rentes viagères. Puis, la table CPM-2014 (*2014 Canadian Pensioners Mortality Life Table*) a été construite suivant une méthodologie similaire à celle adoptée aux Etats-Unis, ainsi que pour l'échelle de projection (CIA, 2014).

Au Royaume Uni, « *The Continous Mortality Investigation : CMI* » publie à partir de la moitié du 20<sup>ème</sup> siècle des tables périodiques permettant la projection des quotients de mortalité par âge (IAFA, 1990). En 2003, l'utilisation des modèles stochastiques de

mortalité a été approuvée (CMI, 2004). A partir de 2009, une nouvelle série de tables furent publiées avec une échelle de projections basée sur les données de 1961 à 2008. Ces tables sont révisables annuellement.

Les pays en voie de développement font aussi des efforts quant à la construction de leurs propres tables actuarielles. Pendant longtemps, un grand nombre de pays africains ont adopté d'anciennes tables françaises de tarification et de provisionnement des produits d'assurance Vie-Décès : Les tables TV/TD64-65, TV/TD 88-90.

En Tunisie, l'arrêté du ministère des finances du 05 janvier 2009 est venu promulguer de nouvelles tables de mortalité estimées à partir des données de la population globale de l'année 1999 : Une table périodique TM99/TV99 pour le provisionnement des produits d'assurance vie/décès et une table générationnelle TGEN99 pour le provisionnement des rentes viagères.

En Afrique subsaharienne, les efforts ont été intensifiés afin de trouver un substitut à l'utilisation des tables françaises par la construction de tables de mortalité d'expérience pour le provisionnement des rentes viagères. Kamega a abouti, à travers ses travaux, à l'établissement de tables de mortalité prospectives pour la mortalité des rentiers dans la région avec un positionnement sur les tables générationnelles françaises TGH 05 et TGF 05 (Kamega, 2011 ; Kamega et Planchet, 2011).

Ce que nous observons à travers ce bref exposé des différentes expériences dans différents pays, développés ou en voie de développement, est une quête permanente pour adapter les tables de mortalité à l'expérience de la population de rentiers ainsi que l'usage des tables de mortalité prospectives pour la tarification, le provisionnement et le pilotage des régime de rentes.

L'Algérie se trouve encore en retard par rapport à cette perspective. Les seules tables réglementaires de tarification des produit d'assurance vie et décès sont bien les tables TV97-99 et TD 97-99 publiées par le Conseil National des Assurance en 2004 (CNA, 2004). Ces tables ont été construites à partir des données de la mortalité de la population globale de la période 1997-1999. Depuis, aucune autre action n'a été menée dans ce sens.

Dans un contexte d'amélioration continue des taux de mortalité et le prolongement de la durée de vie humaine, la table TV 97-99 semble être loin de pouvoir refléter la mortalité réelle de la population algérienne. Il est primordial de mettre à disposition du secteur de l'assurance-vie algérien une table de tarification adéquate et susceptible de prévoir l'évolution des taux de mortalité des années à venir.

## 1.2 Objectif et méthodologie

Dans ce travail, nous proposons de construire une table de mortalité prospective pour la population algérienne à l'âge de la retraite à utiliser pour la tarification, le provisionnement et le pilotage des régimes de rentes. La littérature en matière de modèles prédictifs de mortalité s'est abondamment enrichie depuis la contribution de Lee et Carter (1992) qui constitue encore le modèle pilote de la modélisation prospective de la mortalité. Plusieurs modifications et adaptations ont été par la suite proposées à ce modèle notamment l'introduction de l'effet cohorte par Renshaw et Haberman (2006) et l'utilisation des P-splines pour l'ajustement des paramètres de ce modèle (Currie, 2006). Une nouvelle approche a été récemment développée sous la nomination du modèle de Cairns-Blake-Dowd CBD (Cairns and al. 2006). La version originale du modèle CBD a subi plusieurs adaptations par la suite, principalement en introduisant l'effet cohorte et l'effet d'âge quadratique (Cairns and al., 2009). Pour ce travail, étant donné qu'il s'agit d'une première tentative de construction d'une table de mortalité prospective sur des données algériennes, et loin d'aborder une analyse comparative entre les modèles prospectifs de mortalité, nous préférons nous limiter à l'usage du modèle original de Lee-Carter. Un tel choix n'est pas censé anéantir tous les problèmes de sous tarification des rentes viagères en Algérie mais seulement donner un aperçu global du déficit. Malgré ses nombreux avantages, le modèle de Lee-Carter reste largement critiqué par les actuaires particulièrement pour les projections lointaines. En effet, La procédure d'estimation et de projection telle qu'elle a été proposée dans la contribution originale de Lee et Carter, a l'inconvénient de conduire à une décélération continue de l'espérance de vie projetée au lieu de maintenir sa tendance historique (Debonneuil et al., 2015 ; Bongaarts, 2004). De ce fait, les tables ainsi construites peuvent conduire encore à une légère sous tarification des rentes viagères dans le cas où l'espérance-vie continue sa tendance observée ou s'améliore d'avantage dans le futur au lieu de décélérer.

L'idée fondamentale du modèle de Lee-Carter revient à réduire la surface de mortalité historique à trois paramètres : Deux sont liés à l'âge et un est relatif au temps. La projection de la mortalité dans le futur se résume au simple fait d'extrapoler la tendance temporelle à l'aide des modèles classique de séries temporelles. Pour ce faire, l'historique des années d'observation doit être relativement important et régulier. Pour le cas de l'Algérie, la première table de mortalité basée sur les données de l'état civil fut publiée en 1977 par l'Office National des Statistiques (ONS). Même si, par manque et irrégularité des

données, l'ONS n'a pu assurer une fréquence annuelle d'une telle publication que depuis 1998. Ainsi, pour la période 1977-1997, quelques tables sont manquantes. De même, certaines tables ont été clôturées à l'âge de 70 ou 75 ans. Il est donc nécessaire d'estimer les données manquantes dans la surface de mortalité avant d'appliquer le modèle de Lee-Carter. Li and al. (2004) ont proposé une méthode permettant d'adapter l'usage du modèle de Lee-Carter dans le cas de surface de mortalité incomplète. Ici, nous préférons estimer les données manquantes à l'aide de fonctions polynomiales sur la série des survivants par âge et par année.

Etant fermées en fonction de la disponibilité des données à un âge précoce (généralement à 75 ou 80 ans), les tables de mortalité doivent être extrapolées à des âges très élevés proches de l'âge ultime de survie. Plusieurs méthodes ont été proposées pour y pallier. Ici, nous utilisons la méthode de Coale et Kisker (1990). Il est capital de mettre à disposition de l'assureur une table fournissant une description adaptée de l'évolution de la mortalité. Dans ce cas-ci, les tables de mortalité dites prospectives semblent être d'une très grande utilité, c'est dans ce cadre que va intervenir notre travail.

Au final, les tables prospectives ainsi obtenues vont être utilisées pour estimer la réserve mathématique d'un portefeuille de rentiers et pour quantifier l'impact d'utilisation des tables prospectives de mortalité en matière de provisionnement des rentes viagères et ce, comparativement à l'usage des tables statiques.

Tout au long de ce travail, nous allons maintenir l'hypothèse de stabilité financière durant la période du service de la rente.

Quant aux taux de mortalité, nous allons adopter dans un premier temps l'hypothèse de stabilité dans le temps des taux de mortalité, pour passer ensuite à une hypothèse d'évolution temporelle des taux de mortalité (en gardant une hypothèse de constance locale par morceaux : pour un âge donné et une année donnée).

### **1.3 Présentation du produit**

Le produit traité par notre travail consiste en une assurance de rentes viagères fractionnées en début de période (trimestrielle et payable à partir de 60 ans). Le montant de la rente est fonction de la valeur acquise des versements effectués jusqu'à l'âge de départ à la retraite.

#### 1.4 Présentation du portefeuille

Notre portefeuille est celui des rentes individuelles en cours de service de la Société Nationale des Assurances (SAA – division vie<sup>1</sup>) fourni par la situation arrêtée au 31/12/2008. Ce portefeuille est composé de 1700 rentiers et prédominé par les rentiers du sexe masculin avec une proportion de 86%. La moitié de ces rentiers (51%) sont nés entre 1961 et 1963. 42 % sont nés durant la période 1964 – 1967, une minorité (14 %) est née entre 1968 et 1976. Lorsqu'on prend les rentiers du point de vue du montant annuel de la rente, nous pouvons dire que près de la moitié des rentiers (44%) perçoivent moins de 1000 DA. 36%, perçoivent annuellement entre 1000 et 5000 DA, 19 % entre 5000 et 50000 DA. 1% seulement touchent plus de 50000 DA.

## 2. PROVISIONNEMENT DES RENTES VIAGERES – APPROCHE STATIQUE

Les tables de mortalité périodiques reposent sur l'hypothèse que la mortalité future sera similaire à celle du moment. Ceci implique que la structure des quotients de mortalité à différents âges ne subira aucune évolution dans le temps. Plusieurs modèles ont été développés dans ce sens. Le choix du modèle d'ajustement repose essentiellement sur la minimisation de l'erreur entre quotients bruts et ajustés. Afin de rester toujours sur l'élan de notre objectif initial, qui consiste en une analyse comparative entre les tables statiques et prospectives en matière d'impact sur le provisionnement des rentes, nous avons préféré travailler sur la table de mortalité utilisée à l'heure actuelle par les organismes d'assurance vie en Algérie pour le calcul des produits –vie, à savoir la tables TV 97 – 99. Nous commençons par une brève présentation de cette table avant de l'utiliser pour estimer la provision mathématique du portefeuille considéré.

### 2.1 Présentation de la table TV 97-99

Les tables actuarielles en vigueur en matière de calcul d'assurance-vie en Algérie sont les tables TV 97-99 et TD 97-99, construites et publiées par le Conseil National des Assurance en 2004 (CNA, 2004). Ces tables ont été construites sur la base des données de mortalité algériennes des années 1997, 1998 et 1999. Ici, nous présentons cette table telle qu'elle a été construite par le CNA et nous l'utilisons directement pour le calcul de la provision mathématique sans la moindre adaptation.

---

<sup>1</sup> Cette Division a été filialisée en juillet 2011 donnant lieu à une nouvelle compagnie spécialisée dans l'assurance-vie : AMANA Assurances.



Les données de mortalité étant disponibles jusqu'au groupe quinquennal [80 – 85 ans], la mortalité aux grands âges a été extrapolée en se basant sur le modèle de Makeham (Makeham, 1867) estimé sur les âges adultes. Cette extrapolation a conduit à un âge ultime de 110 ans correspondant à une probabilité de décès presque égale à l'unité ( $q_{110} = 0.9993$ ). Ce résultat a été fondé sur une démarche purement extrapolative ne prenant pas compte de l'avis d'expert ni d'une observation réelle quant à l'âge extrême de la population Algérienne. Malgré cet inconvénient qui s'ajoute à plusieurs d'autres, nous préférons à l'heure actuelle ne pas aborder une évaluation proprement dite de la table en question et nous nous limitons juste à son usage pour des fins de comparaison avec la table prospective.

L'évolution de l'espérance de vie résiduelle en fonction de l'âge  $x$  comme décrite dans la table TV 97-99 est donnée par le graphe suivant :

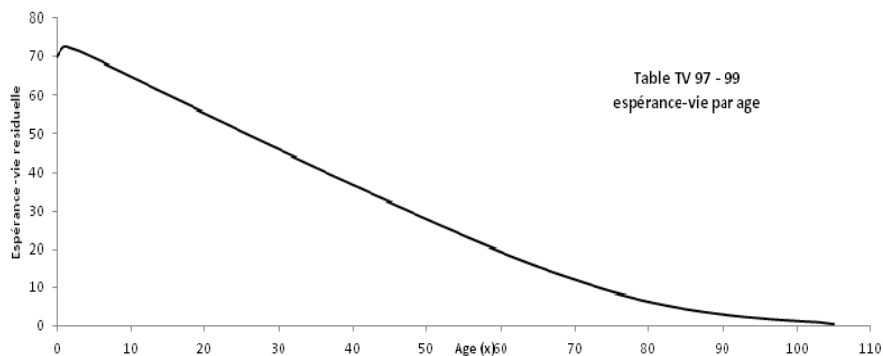


Figure. 1 : Evolution de l'espérance-vie par âges unitaires selon la TV 97-99

## 2.2 Evaluation de la réserve mathématique et son évolution dans le temps

Afin de simplifier le calcul de la provision mathématique, nous trouvons indispensable de passer à une modélisation discrète de la mortalité en introduisant quelques hypothèses simplificatrices :

Nous supposons que les rentes sont annuelles et nous constituons des groupes de rentiers par âge. Ce regroupement peut avoir un impact matériel sur le provisionnement mais pas en matière de comparaison entre les deux approches statique et prospective.

Pour chaque groupe ' $s$ ', nous calculons le montant annuel moyen de la rente  $R_s$ .

Etant donné l'évolution du nombre de survivants en fonction de l'âge  $l_x$ , le calcul de la probabilité de survie entre deux âges ( $x$  et  $x+n$ ) est obtenu par :  ${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$ .

Le taux d'intérêt technique étant de 3.6%, le montant de la réserve mathématique correspondant au groupe 's' à l'année t, est calculé par la formule :

$$RM_{st} = N_{st} \cdot R_s \cdot \ddot{a}_x$$

Ou :

$\ddot{a}_x$  est le prix à l'année t d'une rente viagère individuelle, de début de période, d'une unité monétaire, à percevoir par un individu d'âge x (Tosetti et al., 2003).

$N_{s,t}$  est l'effectif du groupe 's' à l'année 't'. L'évolution de cet effectif peut se décrire par la relation suivante :

$$N_{s,t+n} = N_{s,t} \cdot {}_n P_x$$

$R_s$  représente le montant annuel moyen de la rente perçue par le groupe 's'. En mettant  $V = (1+i)^{-1}$ , la formule précédente peut s'écrire :

$$RM_{s,t} = N_{s,t} \cdot R_s \cdot [1 + {}_1 \hat{P}_x \cdot V + {}_2 \hat{P}_x V^2 + \dots + (w-x-1) \hat{P}_x V^{w-x-1}]$$

t=2009, 2010, 2011, .... 2058 et x=60, 61, 62,..., 110.

Finalement, la réserve mathématique globale à l'année (t) n'est que la somme des réserves mathématiques des différents groupes de rentiers, et dont l'évolution est donnée par la figure suivante:

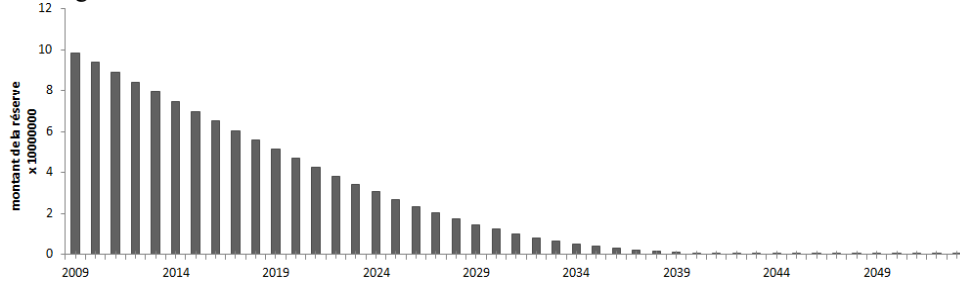


Figure. 2 : Evolution des réserves mathématiques – Approche statique

Cette figure représente l'évolution de la réserve mathématique jusqu'au décès du dernier rentier. Pour un âge de fermeture de 110 ans, un rentier de 60 ans atteindra cet âge de fermeture en 2058. La réserve mathématique pour l'année 2009 est évaluée à 98 429 819 DZD.

### **3. PROVISIONNEMENT DES RENTES VIAGERES - APPROCHE PROSPECTIVE**

L'objectif de cette partie est de proposer une table de mortalité prospective permettant de tenir compte du prolongement de la durée de vie de la population algérienne permettant d'arriver à donner une estimation de la réserve mathématique du portefeuille considéré.

Lorsque l'on utilise des tables périodiques, le principe de prudence stipule d'utiliser les tables féminines pour les produits-Vie et les tables masculines pour les produits – décès. Cette pratique cible à tenir compte d'une éventuelle dérive tendancielle de la mortalité dans l'avenir. Lorsque l'on travaille sur des tables prospectives qui tiennent en compte ces dérives, il devient inutile de continuer à adopter une telle pratique. C'est pourquoi, dans la présente partie, la table prospective sera construite séparément pour les deux sexes.

La construction de tables de mortalité prospectives nécessite de disposer d'un historique d'observation assez long pour pouvoir faire une extrapolation dans le futur. Pour notre cas, nous disposons de la série des tables de mortalité publiées par l'ONS entre 1977 et 2008. Nous utiliserons les cinq tables récentes (2009-2013) pour évaluer la qualité de la projection effectuée en comparant les taux de mortalité par âge entre prévu et observé.

#### **3.1 Base de données**

Notre base de données, comme nous l'avons précédemment souligné, est constituée des tables de mortalité publiées par l'ONS sur la base des enregistrements de l'état civil. La première table algérienne de mortalité basée sur les données de l'état civil a été construite en 1977. Jusqu'à 1998, l'ONS n'a pas pu assurer une publication annuelle de ces tables. De ce fait, la surface algérienne de mortalité ainsi obtenue, comporte encore quelques années manquantes : 1979, 1984, 1986, 1988, 1990, 1992 et 1997. De même, certaines tables ont été clôturées avant l'âge de 80 ans.

Notre base de données comme montré dans les tableaux ci-dessous comprend les années en ligne (de 1977 à 2008) et les âges en colonne (60, 65, 70, 75 et 80 ans) et les nombres de survivants correspondants en cellules, issus des tables de mortalités abrégées construites par l'ONS tout au long de la période considérée, respectivement pour la population masculine et féminine.

t	160	165	170	175	180
1977	59105	52129	42820	31084	18583
1978	61172	54190	45905	35035	22768
1980	59252	52189	43553	34316	22966
1981	61008	54178	45432	36347	25211
1982	62928	56037	47250	38060	27012
1983	71275	65048	54936		
1985	73059	65592	56460		
1987	75444	68307	59096		
1989	78853	73773	64249	52119	37734
1991	7983	7325	6354	4933	3082
1993	7723	7259	6429	5004	
1994	7486	6808	5999	4833	
1995	7533	6879	6040	4883	

t	160	165	170	175	180
1996	7678	7008	6207	5042	
1998	7872	7277	6521	5355	3866
1999	8222	7668	6925	5812	4301
2000	8288	7746	7022	5954	4471
2001	8345	7819	7112	6080	4658
2002	8432	7920	7225	6182	4791
2003	84111	78823	71799	61144	47131
2004	85076	79935	72893	62788	49278
2005	85102	80829	72887	62310	48376
2006	85437	80703	74100	64415	51072
2007	85699	80884	73941	63946	50305
2008	86220	81333	74800	64816	51307

Tableau n° 12 : nombre de survivants par âge et année - hommes 1977 – 2008

t	160	165	170	175	180
1977	63562	57794	49440	37192	23163
1978	63589	58783	52789	44323	30400
1980	65908	60084	51801	41650	28453
1981	67428	61803	53485	43520	30646
1982	69541	64022	55777	45925	33222
1983	73672	67783	59461		
1985	74454	69297	61006		
1987	77152	71260	63508		
1989	79296	75044	64478	51918	36088
1991	8075	7501	6626	5346	3188
1993	7977	7582	6834	5513	
1994	8009	7226	6348	5156	
1995	7974	7376	6578	5421	

t	160	165	170	175	180
1996	7999	7378	6589	5448	
1998	8182	7646	6920	5813	4316
1999	8487	8033	7354	6336	4857
2000	8539	8079	7438	6463	4991
2001	8587	8135	7501	6539	5166
2002	8671	8258	7625	6656	5250
2003	86739	82535	76460	66908	52677
2004	87425	83281	77322	67849	54353
2005	87385	83209	76890	67618	53722
2006	88053	84262	78487	69592	56560
2007	88486	84802	78892	69403	56006
2008	88579	84639	79038	70086	56932

Tableau n° 13 : Nombre de survivants par âge et année - femmes 1977 – 2008

La base de données à notre disposition comportent encore quelques manques, et ce comme suit :

- Les années pour lesquelles l'ONS n'a pas publié de tables de mortalité sont : 1979, 1984, 1986, 1988, 1990, 1992 et 1997.
- Parmi les tables qui ont été publiées, certaines ont été clôturées à la classe d'âge [75 et + [. De ce fait, pour les années en question, les  $l_{75}$  et  $l_{80}$ , demeurent manquants : 1983, 1985 et 1987.
- Quelques tables ont été clôturées à l'âge [80 et + [. Les  $l_{80}$  sont manquants : 1993, 1994, 1995 et 1996.

Les tables dont on dispose sont des tables abrégées. Il serait nécessaire de passer à une description par âge détaillée. L'idée est d'interpoler l'évolution du  $l_x$  en utilisant une fonction polynomiale, d'où la nécessité d'effectuer quelques manipulations sur la présente base de données avant de passer à l'application finale.

Les tables de mortalité sont conventionnellement construites avec une population de départ ( $l_0$ ) appelée également racine de table, de 10 000 ou 100 000 individus. On parvient à retracer l'évolution du nombre de survivants en fonction de l'âge ( $x$ ) sur la base des probabilités de décès par âge. Les tables algériennes de mortalité ont été construites sur un effectif initial de 10 000 individus durant la période (1991-2002) tandis qu'une racine de 100 000 a été adoptée pour les années restantes. Les variations en matière de grandeurs des  $l_x$  que l'on observe dans les tableaux ci-dessus sont liées au changement de la racine de tables.

### 3.2 Estimation des données manquantes

Le traitement de notre base de données va être effectué de la façon suivante :

En premier lieu, nous unifions les effectifs à l'âge de départ de 60 ans pour toutes les tables. Nous choisissons  $l_{60} = 100.000$  et nous reconstituerons les  $l_x$  restants proportionnellement aux effectifs de la table initiale.

Ensuite, afin de reconstruire les tables abrégées manquantes ainsi que les  $l_x$  manquants dans certains tables ( $l_{75}$  et  $l_{80}$ ), nous avons effectué un ajustement de ces derniers par rapport au temps ( $t$ ) et ce pour chaque série  $l_x$ ,  $x = 60, 65, 70, 75, 80$ . Seuls les  $l_x$  manquants ont été reconstitués sur la base des équations des fonctions d'ajustements correspondantes, comme montré dans les figures 3 et 4 :

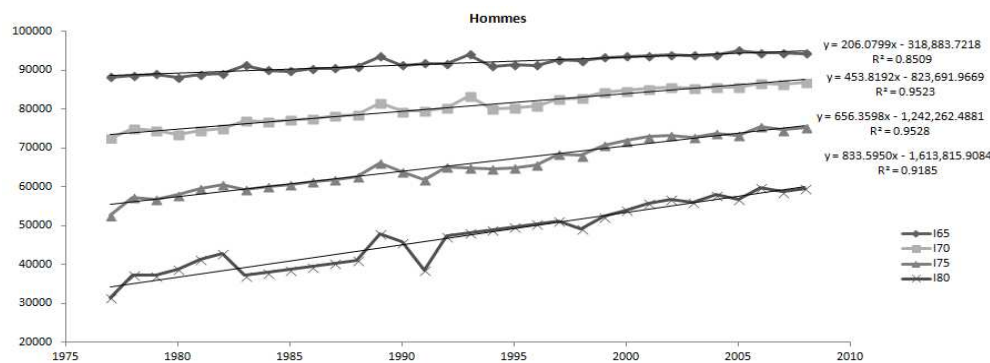


Figure. 3 : Estimation des  $l_x$  manquant par ajustement linéaire - Hommes

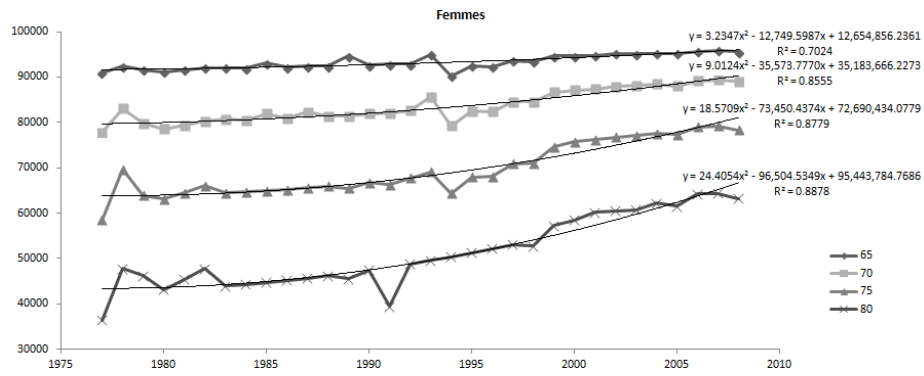


Figure. 4: Estimation des  $l_x$  manquant par ajustement quadratique - Femmes

Pour les données masculines, un ajustement linéaire permet d'obtenir un coefficient de détermination de 85% pour toutes les séries  $l_x$ . Quant aux données féminines, il a fallu utiliser un polynôme d'ordre 2 pour obtenir un coefficient de détermination minimal de 70 %. Ainsi, les  $l_x$  qui manquaient dans la surface de mortalité ont été estimés pour  $t=1977 - 2008$  et  $x= 60, 65, 70, 75$  et 80. Les résultats obtenus respectivement pour les données masculines et féminines sont respectivement représentés dans les tableaux 14 et 15 :

t	160	165	170	175	180
1977	100000	88197	72447	52591	31441
1978	100000	88586	75043	57273	37220
1979	100000	88948	74416	56674	37110
1980	100000	88080	73505	57915	38760
1981	100000	88805	74469	59577	41324
1982	100000	89049	75086	60482	42925
1983	100000	91263	77076	59299	37110
1984	100000	89979	76685	59955	37896
1985	100000	89779	77280	60612	38681
1986	100000	90391	77593	61268	39466
1987	100000	90540	78331	61924	40251
1988	100000	90803	78501	62581	41036
1989	100000	93558	81479	66096	47854
1990	100000	91215	79408	63894	45748
1991	100000	91757	79594	61794	38607
1992	100000	91628	80316	65206	47318

t	160	165	170	175	180
1993	100000	93992	83245	64793	48104
1994	100000	90943	80136	64561	48889
1995	100000	91318	80181	64821	49674
1996	100000	91274	80841	65668	50459
1997	100000	92658	82585	68488	51245
1998	100000	92442	82838	68026	49111
1999	100000	93262	84225	70688	52311
2000	100000	93460	84725	71839	53945
2001	100000	93697	85225	72858	55818
2002	100000	93928	85685	73316	56819
2003	100000	93713	85362	72694	56034
2004	100000	93957	85680	73802	57922
2005	100000	94979	85647	73218	56845
2006	100000	94459	86731	75395	59777
2007	100000	94381	86280	74617	58700
2008	100000	94332	86755	75175	59507

Tableau 14 : base de données de mortalité traitée - hommes 1977 – 2008

t	l60	l65	l70	l75	l80	t	l60	l65	l70	l75	l80
1977	100000	90925	77782	58513	36442	1993	100000	95048	85671	69111	49594
1978	100000	92442	83016	69702	47807	1994	100000	90223	79261	64378	50405
1979	100000	91589	79787	63939	46214	1995	100000	92501	82493	67983	51262
1980	100000	91163	78596	63194	43171	1996	100000	92237	82373	68109	52164
1981	100000	91658	79322	64543	45450	1997	100000	93594	84461	70921	53111
1982	100000	92064	80207	66040	47773	1998	100000	93449	84576	71046	52750
1983	100000	92006	80710	64441	43965	1999	100000	94651	86650	74655	57229
1984	100000	91951	80507	64661	44324	2000	100000	94613	87106	75688	58449
1985	100000	93074	81938	64918	44729	2001	100000	94736	87353	76150	60161
1986	100000	92138	80920	65212	45179	2002	100000	95237	87937	76762	60547
1987	100000	92363	82315	65543	45674	2003	100000	95153	88150	77137	60730
1988	100000	92349	81403	65913	46214	2004	100000	95260	88444	77608	62171
1989	100000	94638	81313	65474	45510	2005	100000	95221	87990	77379	61477
1990	100000	92584	81958	66763	47430	2006	100000	95695	89136	79034	64234
1991	100000	92892	82056	66204	39480	2007	100000	95837	89323	79206	64340
1992	100000	92842	82585	67764	48827	2008	100000	95552	89064	78352	63227

Tableau 15 : base de données de mortalité traitée – femmes 1977 – 2008

Ensuite, nous avons effectué un ajustement sur chacune des tables prise séparément afin d'en déduire l'évolution des  $l_x$  aux âges unitaires. L'ajustement, comme montré dans la figure 5, de type quadratique (*Le critère du choix du type d'ajustement est le  $R^2$* ) nous a permis de reconstruire les tables annuelles détaillées à l'aide des paramètres des fonctions d'ajustement quadratiques.

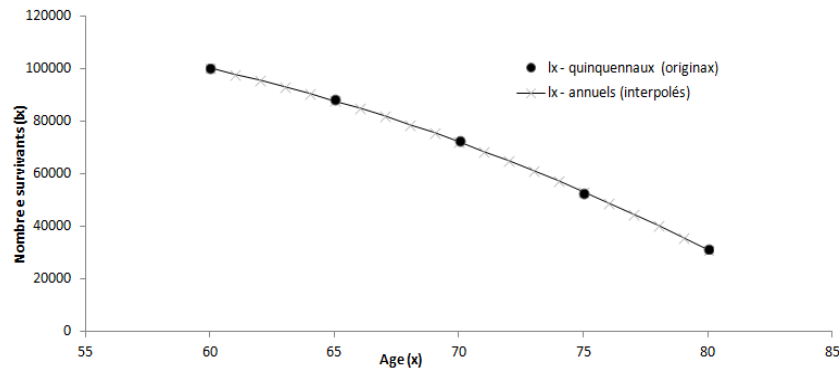


Figure. 5 : Interpolation quadratique du nombre de survivants (Table masculine 1977)

Les coefficients de détermination obtenus dans ce second ajustement sont dans tous les cas approximatifs à 1 (supérieurs à 0,9965 pour toutes les séries ajustées). Ce qui peut traduire la qualité de l'ajustement. Ces deux étapes d'ajustement nous ont permis d'avoir une base de données complète et continue en âge (de 60 à 80 ans) et en années (1977 à 2008).

### 3.2.1 Construction des surfaces brutes de mortalité

L'étape qui suit consiste à calculer les probabilités de décès à tout âge  $x$  à chaque année  $t$ , et ce en utilisant la formule classique de calcul des quotients annuels de mortalité :

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

Où  $d_x$  est le nombre de décès enregistrés à l'âge  $x$  parmi l'effectif initial  $l_x$ .

Nous avons ainsi obtenu les surfaces brutes de mortalité par âge détaillés respectivement pour la population masculine et féminine :

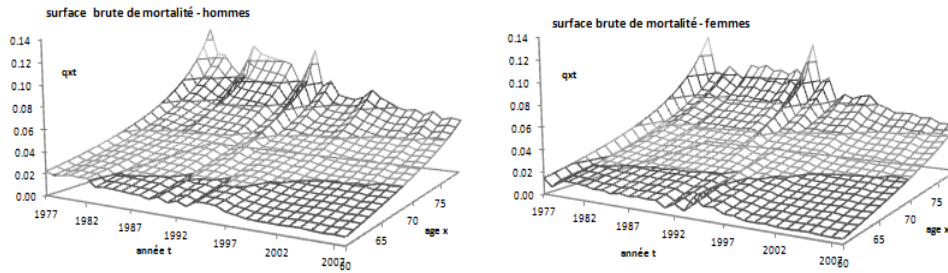


Figure. 6 : Surfaces brutes de mortalité par âges détaillés [60 – 80]

Ce qui attire notre attention, sont les perturbations observées sur les données antérieures à 1993 et ce sur les deux surfaces. Ces perturbations ne sont pas d'ordre naturel, puisque l'Algérie n'a vécu aucun événement, durant cette période, à la hauteur de ces pics nous semble-t-il. Aucune autre explication ne nous a parue valable ou suffisamment justifiée, même au niveau de la Direction Population de l'ONS.

Nous allons à présent passer à l'ajustement de ces surfaces de mortalité à l'aide du modèle de Lee-Carter (Lee and Carter, 1992).

## 4. AJUSTEMENT DES SURFACES BRUTES DE MORTALITE AU MODELE DE LEE-CARTER

### 4.1 Rappel sur le modèle de Lee-Carter

Il s'agit d'une méthode d'extrapolation des tendances passées initialement utilisée sur des données américaines, qui est devenue rapidement un standard (Planchet et al., 2006). La modélisation retenue pour le taux instantané de mortalité est la suivante (Lee and Carter, 1992):

$$\ln \mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x k_t$$



Où :

$\mu_{xt}$  est le taux instantané de mortalité à la date  $t$  pour l'âge  $x$  (ce taux est supposé constant par morceaux) ;

$\alpha_x$  représente la composante spécifique à l'âge  $x$  et décrit le comportement moyen des  $\ln(\mu_{xt})$  au cours du temps ;

$\kappa_t$  est un indice qui décrit l'évolution générale de la mortalité ;

$\beta_x$  indique la sensibilité de la mortalité instantanée par rapport à l'évolution générale de la mortalité, c'est-à-dire l'écart des  $\ln(\mu_x(t))$  par rapport à  $\alpha_x$ .

Les âges pour lesquels les  $\beta_x$  sont importants seront plus sensibles à l'évolution générale de la mortalité. Cette sensibilité est supposée constante au cours du temps (Planchet, et al., 2006).

$\varepsilon_{x,t}$  est un terme d'erreur qui reflète les particularités propres à l'âge  $x$  ou à la date  $t$  qui ne sont pas capturées par le modèle et ils sont supposés indépendants, identiquement distribués selon une loi  $N(0, \sigma^2)$ .

Le modèle de Lee-Carter est une méthode qui combine les modèles démographique de mortalité avec la modélisation des séries temporelles (Booth et al., 2006). Il tente de décomposer le logarithme du taux instantané de mortalité en deux composantes : une propre à l'âge, contenue dans les paramètres  $\alpha_x$  et  $\beta_x$ , et une autre temporelle ( $\kappa_t$ ), et sur la base de laquelle, par le biais d'une modélisation en séries temporelles, la tendance future de mortalité est déterminée.

Cette méthode de modélisation, appliquée pour la première fois sur la population américaine, a ensuite été appliquée en maintes occasions et sur différentes populations : Canada, Chili, Japon, Belgique, Autriche, Australie...etc. Elle a été appliquée lors de sa première apparition sur une population regroupant les deux sexes (unisexes) mais elle a été utilisée par la suite dans le cas de distinction entre les sexes (Voir Booth, et al., 2006 pour quelques exemples d'application).

Le principal avantage présenté par le modèle de Lee-Carter est certainement le fait qu'il réduit toute la procédure d'estimation à l'extrapolation de la tendance constatée sur les données passées pour prévoir l'évolution future de mortalité, réduisant ainsi le nombre de paramètres à estimer. Cet avantage représente en lui-même un inconvénient, dans l'optique où, en se basant sur les données passées uniquement, on laisse les prédictions du modèle en dehors de toute influence de variables externes : évolution du style de vie, évolution de la médecine, apparition de nouvelles maladies...etc.

## 4.2 Estimation des paramètres du modèle

La surface de mortalité déjà obtenue sera ajustée au modèle suivant :

$$\ln \mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t$$

L'absence de variables observables dans cette modélisation, rend impossible l'adoption de tout modèle de régression linéaire (Magis et al., 2004). L'idée de Lee-Carter est donc d'ajuster à la série des logarithmes des taux instantanés de décès une structure paramétrique de sorte à minimiser la variance des erreurs (méthodes des moindres carrés), ce qui implique la maximisation de la part de la variance expliquée par le modèle.

Rappelons que l'estimation des paramètres  $\alpha_x$  et  $\beta_x$ , les  $\kappa_t$  doit se faire tout en respectant les contraintes suivantes :

$$\sum_t \kappa_t = 0; \quad \text{et} \quad \sum_x \beta_x = 1$$

Avant de passer à l'estimation des paramètres nous devons d'abord estimer les taux instantanés de mortalité  $\mu_x(t)$  sous l'hypothèse de leur constance par morceau qui implique :  $\mu_{x+t} = \mu_x$ , pour  $0 \leq t < 1$   $x \in \mathbb{N}$ .

Le taux instantané de mortalité est donc calculé par la formule :

$$\hat{\mu}_{x(t)} = \frac{D_x(t)}{L_x(t)} ;$$

Où  $D_x(t)$  représente le nombre de personnes d'âge  $x$  décédées durant l'année  $t$ , et  $L_x(t)$  l'exposition réelle au risque de décès (Brouhns et Denuit, 2002):

$$L_x(t) = -\frac{l_x(t) \cdot \hat{q}_x(t)}{\ln(1 - \hat{q}_x(t))};$$

Le taux instantané de mortalité estimé peut donc être exprimé par la formule suivante :

$$\hat{\mu}_{x(t)} = \frac{-\ln(1 - \hat{q}_x(t)) \cdot l_x(t)}{l_x(t) \cdot \hat{q}_x(t)};$$

Où  $l_x(t)$  est le nombre d'individus d'âge  $x$  lors de l'année  $t$ , et  $\hat{q}_x(t)$  l'estimation de la probabilité de décéder à l'âge  $x$  durant l'année  $t$ .

### 4.2.1 Estimation des $\alpha_x$

Le paramètre  $\alpha_x$  est calculé, pour chaque âge  $x$ , par la moyenne dans le temps du logarithme du taux instantané de mortalité. Nous pouvons écrire :

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \ln \hat{\mu}_{xt}$$

Les  $\hat{\alpha}_x$  estimés respectivement pour les tables masculine et féminine sont données par les graphes suivants :

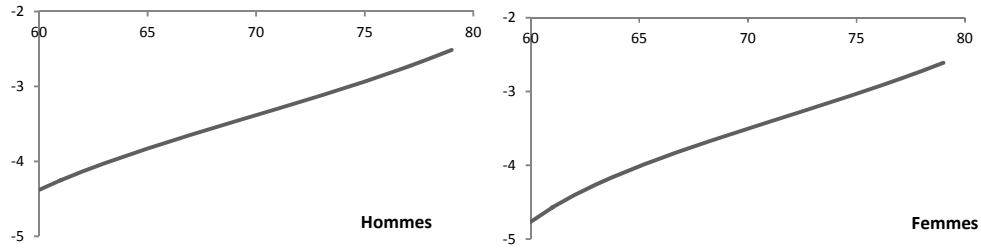


Figure. 7 : estimation des  $\hat{\alpha}_x$

L'observation de l'évolution du paramètre  $\alpha_x$  en fonction de l'âge pour les deux sexes révèle une tendance ascendante exprimant une relation proportionnelle entre l'âge et les taux de mortalité. Le paramètre  $\alpha$  représente la part de mortalité en relation avec le vieillissement.

#### 4.2.2 Estimation des $\hat{\beta}_x$ et des $\hat{\kappa}_t$

L'estimation des paramètres  $\beta_x$  et  $\kappa_t$  revient à construire la matrice  $Z$  de dimension  $(X_M - X_m + 1 ; T_M - T_m + 1)$  tel que  $Z_{x,t} = \ln(\hat{\mu}_x(t)) - \hat{\alpha}_x$ . Et à chercher une approximation de cette matrice sous forme du produit de deux vecteurs  $Z \approx \hat{\beta} \cdot \hat{\kappa}'$ .

L'idée de Lee-Carter consiste à décomposer la matrice  $Z$  en valeurs singulières (SVD : Singular Value Décomposition). Mais d'autres méthodes ont été ensuite proposées telles que : MLE (Maximum Likelihood Estimated) et WLS (Weighted Least Squares) proposées par John R. Wilmoth (Wilmoth, 1993), et la méthode SSM (State Space Model) (Lazar, 2005).

Dans l'article original (Lee & Carter, 1992), l'idée qui a été proposée consiste en la procédure suivante : Dans ce sens, Soient  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > 0$  les valeurs propres de  $Z'Z$  et soit  $\mu_1$  le vecteur propre de  $Z'Z$  associée à la plus grande valeur propre  $\lambda_1$  et  $v_1$  le vecteur propre de  $ZZ'$  associé à la même valeur propre. L'utilisation du logiciel XLStat nous a permis d'avoir les valeurs singulières des matrices  $ZZ'$  et  $Z'Z$ . Ensuite, les paramètres en question sont calculés par les formules suivantes (Magis et al., 2004):

$$\hat{\beta} = \frac{v_1}{\sum_j v_{1j}};$$

$$\hat{\kappa} = \sqrt{\lambda_1} \cdot (\sum_j v_{1j}) \cdot u_1;$$

Pour les besoins du présent travail, nous proposons une procédure de décomposition matricielle en utilisant XL- Solveur. L'idée principale de cette méthode est de calculer les deux vecteurs :  $\beta$  et  $\kappa$  respectivement de dimension  $(n \times 1)$  et  $(1 \times p)$  dont le produit donne

une approximation de la matrice  $Z$ . La décomposition sera réduite à résoudre le problème suivant :

- Les valeurs à estimer seront les vecteurs  $\beta$  et  $\kappa$  ;
- La fonction objective consistera à minimiser la somme des erreurs carrées entre la matrice  $Z$  et le produit des deux vecteurs à estimer

$$\min A = \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{t=1}^p [\ln(u_{xt}) - \hat{\beta}_x * \hat{\kappa}_t]^2$$

- Les contraintes :  $\sum_{x=0}^n \hat{\beta}_x = 1, \sum_{t=1}^p \hat{\kappa}_t = 0, \forall x \in [0, n]; \hat{\beta}_x \geq 0$ .

Bien que cette méthode aboutit à des résultats plus performants comparativement à ceux obtenus avec la méthode d'Analyse en Composantes Principales (APC). L'utilisation de XL-Solveur pour la décomposition de la matrice  $Z$  est détaillée en annexe 1.

Les résultats obtenus, avec un taux d'inertie de 99,49% pour les hommes et de 98,79% pour les femmes, sont les suivants :

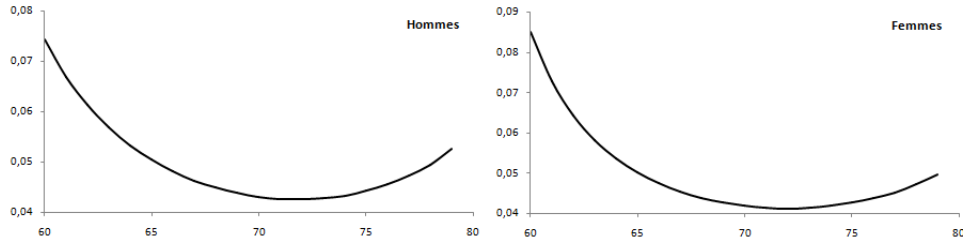


Figure. 8 : estimation des  $\beta_x$

L'allure de la sensibilité des différents âges aux variations tendancielle de mortalité affiche une similitude chez les deux sexes. Les âges compris entre 70 et 74 ans semblent être les moins sensibles comparativement aux autres âges. Notons seulement que les résultats présentés dans la figure ci-dessus sont des résultats bruts et non lissés comme ils donnent l'impression de l'être. L'ajustement déjà effectué sur les séries des nombre de survivant dans la première partie est susceptible de donner lieu à de tels résultats.

Quant au paramètre  $\kappa$ , son évolution en fonction de l'année  $t$  est donnée par les figures suivantes :

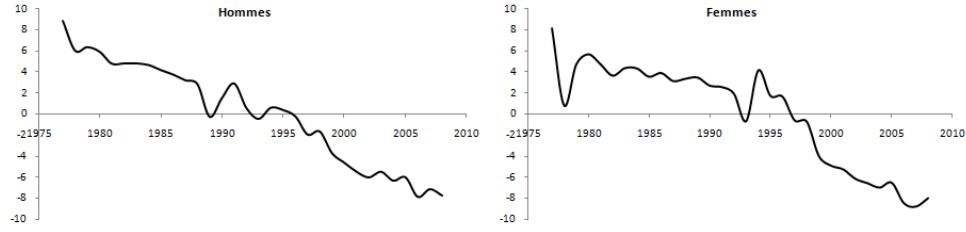


Figure. 9: estimation des  $\hat{k}_t$  (hommes – femmes)

La décroissance du  $k_t$  reflète une baisse continue des taux de mortalité à travers le temps expliquée par la progression enregistrée en matière de médecine, l'amélioration des conditions de vie ... etc. Mise à part la bosse observée au cours de la décennie 90 et qui est due aux événements terroristes, les autres perturbations observées sur les deux courbes ; et comme nous l'avons déjà signalé, ne doivent pas être d'ordre naturel, et demeurent encore sans explication.

Cette première estimation étant uniquement basée sur l'ajustement des taux de mortalité, le modèle ainsi estimé ne garantit pas forcément un bon rapprochement des décès observés par les décès prédits. Pour cela, Lee et Carter (1992) ont proposé de réajuster ; dans une deuxième étape, les paramètres du modèle de sorte à prendre en compte le nombre total de décès observés durant chaque année de la période d'observation. L'étape suivante consiste à de réajuster les  $k_t$  de sorte à ce que le nombre total de décès entre 60 et 80 ans observé durant chaque année ( $t$ ) soit égal au même nombre obtenu par modélisation étant donné  $\alpha_x$  et  $\beta_x$ . Autrement dit :

$$\sum_{x=x_m}^{x_M} D_{xt} = \sum_{x=x_m}^{x_M} L_{xt} \cdot \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \cdot \hat{k}_t)$$

Pour chaque année  $t$ , nous calculons  $\hat{k}_t$  correspondant. Nous avons pris critère d'arrêt  $\varepsilon < 0,0001$ . La série obtenue est corrigée de sorte à respecter la contrainte d'identifiabilité  $\sum_{t=t_m}^{t_M} k_t = 0$ . Nous calculons donc  $\kappa^*_t = \hat{k}_t - \bar{k}$ , telle que  $\bar{k}$  est la moyenne des  $\hat{k}_t$ .

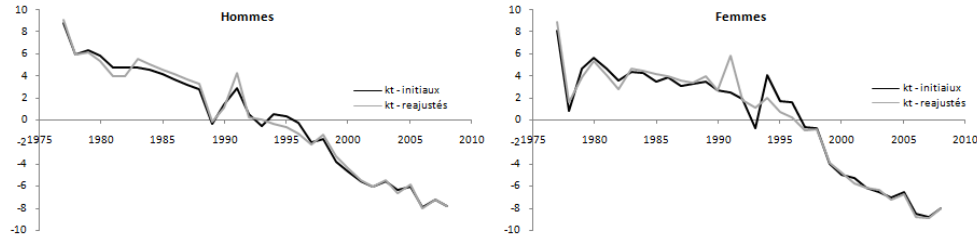


Figure. 10 : Le paramètre  $k$  réajusté ( $kt^*$ ) – hommes – femmes

Et enfin, nous corrigeons les  $(\hat{\alpha}_x)$  afin que l'égalité entre les décès observés et les décès prédits par le modèle reste valide. Nous aurons donc :

$$\alpha_x^* = \bar{\alpha}_x - \hat{\beta}_x \cdot \bar{k}_t$$

La figure 11 représente les paramètres alpha recalculés  $\alpha_x^*$  :

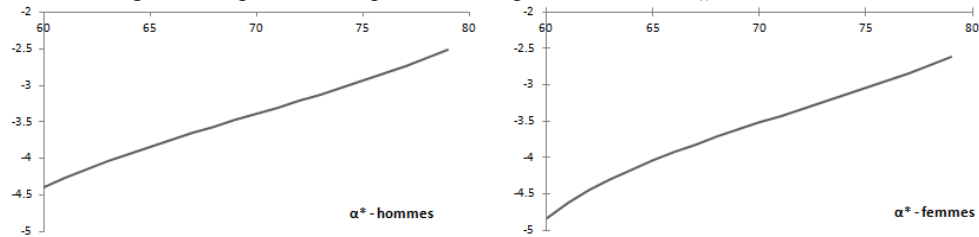


Figure. 11 : Le paramètre  $\alpha$  recalculé ( $\alpha^*$ )-(hommes- femmes)

Notons seulement que pour la suite des calculs,  $\hat{\beta}$  sera systématiquement remplacé par  $\beta^*$ .

#### 4.3 Ajustement des surfaces brutes de mortalité (1977–2008) Au modèle de Lee - Carter

Une fois les différents paramètres du modèle de Lee & Carter estimés, nous pouvons reconstruire la surface de mortalité ajustée à la période (1977 – 2008) et à une tranche d'âge de 60 – 80 ans, en recalculant les taux instantanés de mortalité par la formule suivante :

$$\mu_{xt}^* = \exp (\alpha_x^* + \beta_x^* k_t^*)$$

Les résultats obtenus, respectivement pour les hommes et pour les femmes sont représentés dans les figures suivantes :

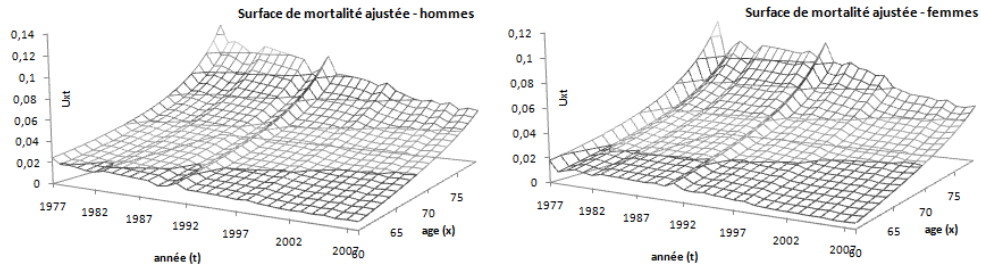


Figure. 12 : Surface de mortalité ajustée (1977 – 2008) - Hommes – Femmes

#### 4.4 Extrapolation des taux de mortalité futurs

Cette étape sera consacrée à l'estimation des taux de mortalité futurs, c'est-à-dire les taux de mortalité à tout âge  $x \in [60, 80[$  mais pour  $t > 2008$ . Ceci revient à extrapoler la tendance temporelle  $k_t$  dans le futur. Tenant compte de l'âge de fermeture choisi, qui est de 110 ans, l'extrapolation doit donc se faire pour les cinquante prochaines années ; c'est-à-dire à l'horizon 2058, puisque l'individu le plus jeune du portefeuille qui a 60 ans en 2008 aura 110 ans en 2058.

L'extrapolation des  $k_t$  peut se faire par une modélisation de type ARIMA, par toute modélisation de séries temporelles (Planchet et al., 2006) ou encore par régression linéaire (Planchet, 2009). Pour le présent travail, nous avons utilisé un modèle de type marche aléatoire avec dérive (ARIMA (0, 1, 0)) comme dans Lee and Carter (1992). Le modèle de projection de la tendance temporelle de mortalité s'écrit comme suit :

$$k_t = k_{t-1} + d + \delta_t$$

Avec  $d$  comme dérive et  $\delta_t$  un terme d'erreur.

L'estimation de la dérive est orientée vers la minimisation de la somme des erreurs carrées de la période d'estimation 1978-2008, exprimée par la quantité suivante :

$$\sum_{t=1978}^{2008} (k_t - (k_{t-1} + d))^2$$

Après estimation, les modèles de projection respectivement relatifs aux hommes et aux femmes sont données par les équations suivantes :

$$k_t = k_{t-1} - 0,6068 + \delta_t$$

$$k_t = k_{t-1} - 0,6398 + \delta_t$$

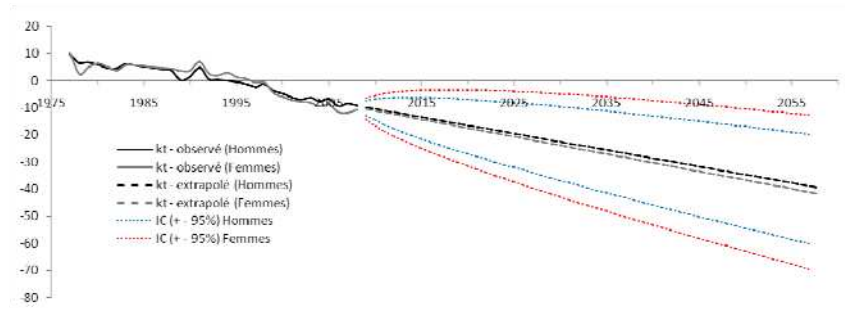


Figure. 13: extrapolation des  $k_t$  à l'horizon 2058

Après avoir extrapolé la tendance temporelle de mortalité  $k_t$ , nous pouvons à présent reconstruire la surface de mortalité pour  $t$  allant de 2009 à 2058 :

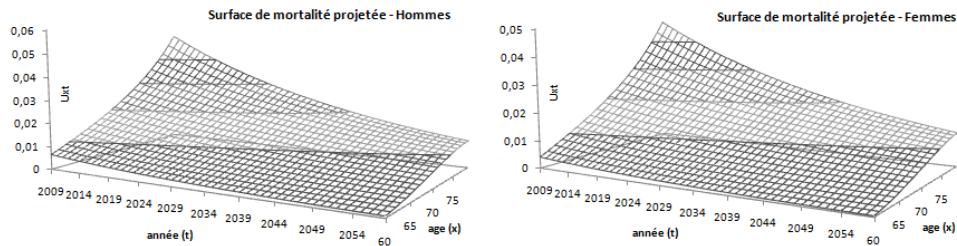


Figure. 14 : Surface de mortalité future (2009 – 2058) jusqu'à 80 ans - Hommes - Femmes

Une fois les taux de mortalité futurs jusqu'à 80 ans calculés, il reste à calculer les taux de mortalité pour les grands âges c'est-à-dire pour plus de 80 ans. Pour ce faire, plusieurs méthodes peuvent être utilisées, nous citons à titre d'exemple (Quashie et Denuit, 2005) : la méthode de Denuit & Goderniaux (2005), celle de Coale & Guo (1989), celle de Coale & Kisker (1990), le modèle de Kannisto...etc.

#### 4.5 Extrapolation des taux de mortalité aux grands âges avec la méthode de Coale & Kisker

La méthode de Coale-Kisker n'est qu'une reformulation de la méthode qui a été proposée par Coale and Guo (1989) adaptée à une description par âges détaillés des taux de mortalité. De plus, l'âge de départ de l'extrapolation est passé de 75 à 80 ans. Les deux méthodes sont aujourd'hui connues sous l'appellation du modèle de Coale-Kisker. Le principe de la méthode est basé sur le constat de décélération des taux de mortalité aux âges élevés. En admettant que le taux d'accroissement des taux de mortalité  $k_x$  ; qui est



égal à  $\ln \left[ \frac{\mu_x}{\mu_{x-1}} \right]$ , décroît linéairement aux âges élevés, les auteurs ont abouti à établir la relation suivante :

$$k_s = k_{80} + s \cdot (x - 80), \quad x \geq 80.$$

$k_{80}$  représente le taux d'accroissement annuel moyen des taux de mortalité ajustés entre 65 et 80 ans :

$$k_{80} = \frac{\ln \left( \frac{\hat{\mu}_{80}}{\hat{\mu}_{65}} \right)}{15}$$

La formule qui a été retenue pour l'extrapolation des taux de mortalité

aux âges élevés est :

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{x-1} \exp (k_{80} + s \cdot (x - 80)), \quad x \in \{80, 81, 82 \dots\}$$

Afin de déterminer le coefficient  $s$  relatif à la pente, il est nécessaire de fixer une valeur limite à l'extrémité de la table (Brouhns et al., 2002). Pour cela, les auteurs ont fixé, arbitrairement, le taux de mortalité pour un âge de fermeture de 110 ans :

$$\hat{\mu}_{110} = \begin{cases} 1.0 & \text{pour les hommes.} \\ 0.8 & \text{pour les femmes.} \end{cases}$$

Cette contrainte n'implique pas la définition de l'âge de 110 ans comme un âge ultime de survie mais juste une valeur permettant d'orienter l'extrapolation aux âges élevés et d'éviter une éventuelle intersection entre les deux courbes masculine et féminine. La définition d'un âge ultime de survie 'w' revient à imposer que la probabilité de décès à cet âge soit égale à 1 ( $q_w = 1$ ) comme ça été proposé par Denuit et Goderniaux (2005) ou une limite d'âge de 130 ans a été imposée. Ici,  $\mu_{110} = 1$  n'implique pas une extinction totale de la population de base comme dans le cas où l'on impose  $q_x = 1$ , sauf que lorsque le nombre de survivant au delà de cet âge de fermeture, qu'on doit distinguer de l'âge ultime, permet d'arrêter la table à cet âge pour des fins de simplification.

Etant donné cette contrainte de fermeture, et étant donné la relation :

$$\hat{\mu}_{110} = \hat{\mu}_{79} \exp \left( \sum_{x=80}^{110} k_x \right) = \hat{\mu}_{79} \exp \left( \sum_{x=80}^{110} (k_x + s \cdot (x - 80)) \right)$$

La pente ' $s$ ' peut être déduite par la formule suivante :

$$s = - \frac{\ln \left( \frac{\hat{\mu}_{79}}{\hat{\mu}_{110}} \right) + 31k_{80}}{465}$$

L'utilisation de la méthode de Coale-Kisker nous a permis d'avoir les résultats suivants :

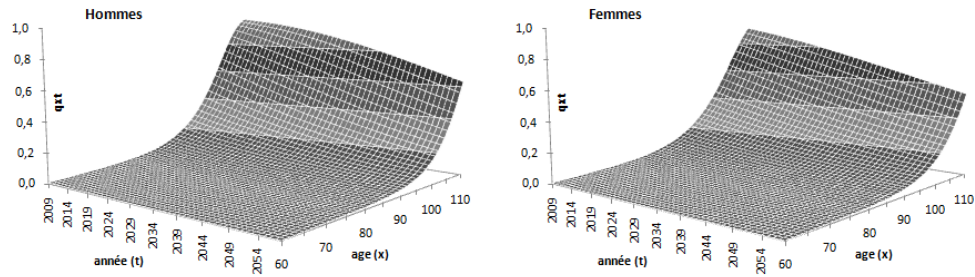


Figure. 16: Surfaces de mortalité prospective construite à l'aide du modèle de Lee-Carter

Nous tenons à souligner que la contrainte de fermeture ( $\mu_{110} = 1$  pour les hommes et  $\mu_{110} = 0.8$  pour les femmes, a été imposé à l'horizon de l'extrapolation (i.e. 2058), la pente 's' ainsi obtenue a été appliquée de façon rétroactive jusqu'à 2009. Cette procédure a permis d'imposer une réduction graduelle du  $q_{110}$  de 0.98 en 2009 à 0.63 en 2058 pour les hommes, et de 0.91 à 0.55 pour les femmes. En l'absence de toute information concernant l'âge limite en Algérie, cette contrainte est arbitrairement imposée à nos estimations sans toutefois affirmer quoi que ce soit à propos de cette valeur. Toutefois, la fermeture de notre table à 110 ans n'est pas censée avoir un grand effet en termes de provisionnement des rentes viagères, la chance de survivre au-delà de cet âge étant dérisoire.

#### 4.6 Mesure de la qualité de l'ajustement

Dans l'intention de mesurer la qualité de l'ajustement des surfaces de mortalité ; masculine et féminine, effectuées à l'aide du modèle de Lee & Carter, nous avons eu recours au coefficient de détermination ( $R^2$ ), qui s'interprète comme étant la part de la variance temporelle des taux bruts de mortalité capturée par le modèle de Lee & Carter. Pour ce genre d'ajustement on a l'habitude de procéder à une segmentation par âges (Brouhns et al., 2002 ou Brouhns et Denuit, 2002). La comparaison a été faite entre les quotients bruts de mortalité et ceux ajustés par le modèle de Lee-Carter, pour la période (1977 – 2008) et pour la plage d'âge (60 – 80). Les résultats sont affichés dans le tableau suivant :

x	coefficient de détermination ( $R^2$ )	
	Hommes	femmes
60	0,7495	0,5510
61	0,7905	0,6296
62	0,8297	0,7041
63	0,8665	0,7730
64	0,9000	0,8346
65	0,9294	0,8872
66	0,9541	0,9295
67	0,9736	0,9614
68	0,9877	0,9830
69	0,9963	0,9954
70	0,9999	0,9999
71	0,9987	0,9980
72	0,9935	0,9910
73	0,9850	0,9804
74	0,9739	0,9672
75	0,9607	0,9522
76	0,9462	0,9360
77	0,9307	0,9189
78	0,9145	0,9011
79	0,8978	0,8823

Tableau n° 16 : Coefficient de détermination ( $R^2$ ) entre les taux ajustés et les taux bruts

L'observation des ( $R_x^2$ ) permet de dire que l'ajustement effectué est de qualité correctement, notamment pour la table hommes où nous observons un seuil de détermination de 0,75. L'ajustement de la table femmes l'est mais de façon moindre, vu notamment les apports dérisoires affichés pour les trois premiers âges.

#### 4.7 Qualité des tables projetées (2009 -2013)

Une autre méthode pour l'évaluation de la qualité de la projection faite sur les taux de mortalité par âge serait de comparer les résultats obtenus pour la période 2009 – 2013 avec les résultats observés pour la même période. Pour ce faire, nous visualisons dans le graphe suivant les courbes des taux de mortalité pour le groupe d'âge [60 – 80[ issues des publications de l'ONS pour les années 2009, 2010, 2011, 2012 et 2013 aux bandes de confiances estimées sur la base de nos projections faites pour la même période. Une période de comparaison de 5 années semble être largement suffisante pour juger de la qualité de la projection. Les résultats sont présentés dans la figure 17.

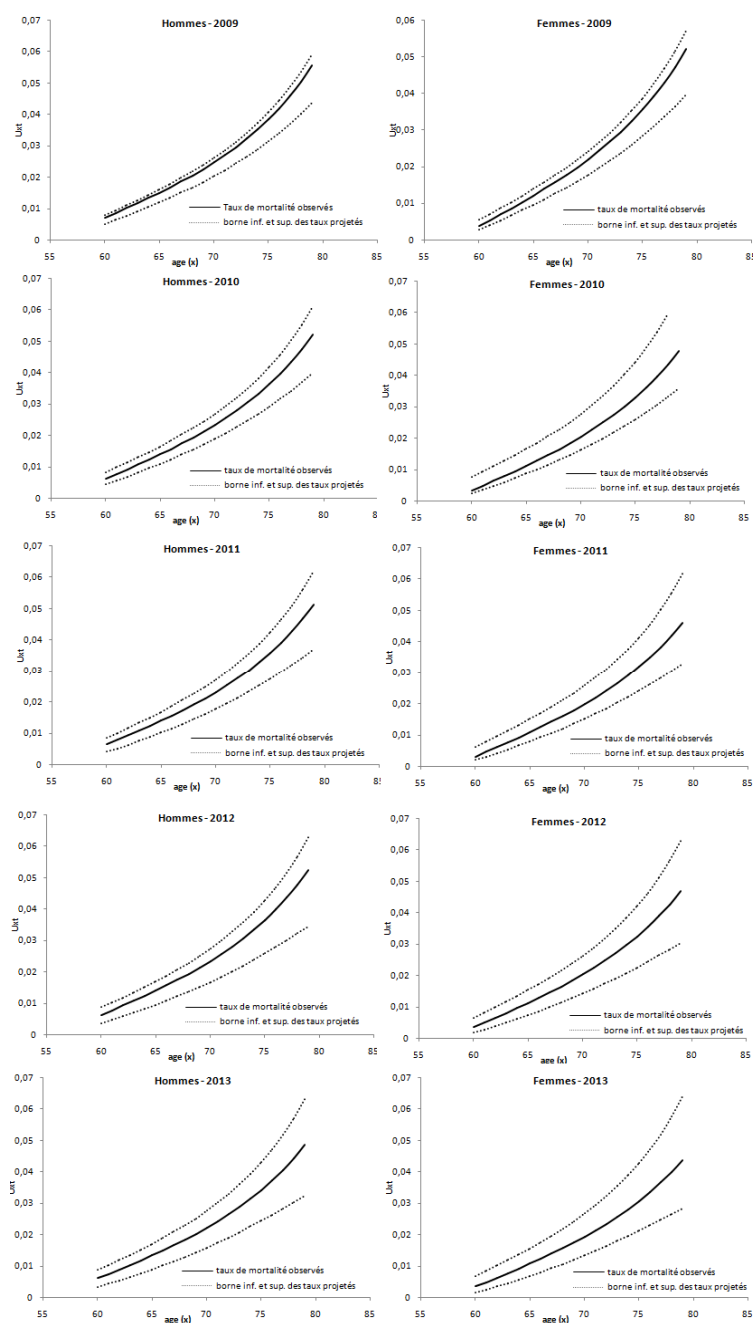


Figure. 17 : comparaison des courbes de mortalité observées aux résultats de la projection (2009 – 2013)

Les taux de mortalité observés entre 60 et 80 ans pour les 5 années concernés se trouvent dans les limites des bandes de confiances des taux projetés et ce pour les deux populations : masculine et féminine. Pour l'année 2009, qui représente la première année de l'horizon de la projection, les courbes des taux de mortalité se trouvent légèrement attirées vers la borne supérieure et ce pour les deux populations. Le fait que nous n'observons pas le même constat pour les autres années nous laisse avancer la thèse d'une hausse conjoncturelle de la mortalité en 2009. Nous remarquons également que les courbes féminines s'approchent légèrement des bornes inférieures des bandes de confiance aux âges inférieurs [60 – 63]. Ceci ne présentent qu'un prolongement du constat révélé de lors de l'analyse des coefficients de détermination entre taux bruts et taux ajustés dans le point précédent. Grosso modo, et sur la base de l'évaluation qui a concerné les 5 premières années de l'horizon de la projection, nous pouvons dire que la projection de la tendance temporelle de la mortalité ainsi que celle de la structure des taux de mortalité qui en a résulté est de qualité.

## 5. CALCUL DES PROVISIONS MATHÉMATIQUES

### 5.1 Méthode de calcul

Afin de simplifier le calcul de la provision mathématique, nous avons considéré indispensables de passer sous certaines hypothèses simplificatrices :

- Nous supposons que la rente est annuelle, unique, et versée au premier jour de l'année, ce qui implique une rente annuelle de début de période.
- Nous constituons de groupe de rentiers du même âge en séparant entre les sexes.
- Chaque groupe 's', est caractérisé par la moyenne de son montant annuel de rente, noté ' $R_s$ ', et son effectif au début de l'année  $t$ , noté ' $l_{st}$ '.

Sous l'hypothèse de constance par morceaux des taux instantanés de mortalité, le passage du taux instantané de mortalité au quotient annuel de mortalité peut se faire par l'approximation suivante : (Magis et al., 2004):

$$\mu_{xt} = -\ln(1 - q_{xt})$$

Cette équation nous permet après développement, de déduire la probabilité de survie pour une année et un âge donnés :

$$\hat{P}_{xt} = \exp(-\hat{\mu}_{xt})$$

Que nous utilisons ensuite, pour calculer la probabilité de survie entre deux âges  $x$  et  $x+n$  :

$${}_n\hat{P}_{xt} = \hat{P}_{xt} \cdot \hat{P}_{x+1,t+1} \cdot \hat{P}_{x+2,t+2} \cdot \hat{P}_{x+3,t+3} \cdots \hat{P}_{x+n-1,t+n-1}$$

Le taux de placement étant supposé stable tout au long de la période durant laquelle la rente est assurée, mettons  $V = (1+i)$ , comme étant le facteur d'actualisation. Le montant de la réserve mathématique correspondant au groupe 's', à l'année t, est calculé par la formule suivante :

$$RM_{st} = N_{st} \cdot R_s \cdot \ddot{a}_x(t)$$

Où

- $\ddot{a}_x(t)$  est le prix à l'année t d'une rente viagère individuelle, de début de période dans une unité monétaire à percevoir par un individu d'âge x (Brouhns et al., 2002).
- $N_{s,t}$  est l'effectif du groupe 's' à l'année 't'. l'évolution de cet effectif peut se traduire par la relation suivante :

$$N_{s,t+1} = N_{s,t} \cdot 1\hat{P}_{x,t}$$

- $R_s$  représente le montant annuel moyen de la rente perçu par le groupe 's'.

Cette formule peut également s'écrire ;

$$RM_{st} = N_{st} \cdot R_s [1 + {}_1\hat{P}_{xt} \cdot V + {}_2\hat{P}_{xt} V^2 + {}_3\hat{P}_{xt} V^3 + \dots + {}_{(w-x-1)}\hat{P}_{xt} V^{w-x-1}]$$

La réserve correspondant à une année t n'est que la somme des réserves constituées sur différents groupes. Autrement :

$$RM_t = \sum_{s=1}^{16} RM_{st}$$

## 5.2 Résultats obtenus

La réserve mathématique globale est égale à la réserve du portefeuille féminin, augmenté par la réserve du portefeuille masculin. La réserve correspondante au portefeuille masculin est évaluée au début de l'année 2009 à un peu plus de 97 millions de dinars, et qui décroît ensuite de façon presque linéaire pour descendre sous la barre des 10 millions de dinars à partir de l'an 2028 et la barre d'un million à partir de l'an 2038.

La réserve correspondante au portefeuille féminin est au niveau de 12 millions de dinars en 2009. Ce montant décroît pour atteindre moins d'un millions de dinars à partir de 2029.

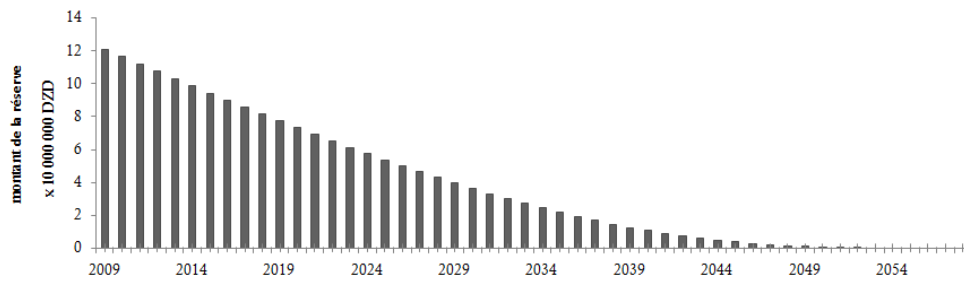


Figure.18 : évolution de la réserve mathématique - Approche prospective

La réserve que doit se constituer l'assureur afin de faire face à son engagement envers les rentiers des deux sexes réunis est évaluée au début de l'année 2009 à un peu plus de 120 millions de dinars et décroît ensuite de façon presque linéaire pour descendre sous la barre des 10 millions de dinars à partir de 2041 et la barre d'un million à partir de l'an 2050. À ce stade l'assureur doit se trouver d'autres rentiers pour compenser le risque impliqué par la baisse du nombre de rentiers.

De la lecture des résultats, nous pouvons facilement constater l'importance que présente la réserve mathématique calculée sous l'hypothèse d'une mortalité prospective par rapport à celle calculée sous l'hypothèse d'une mortalité statique. Cette différence est de plus de 23 %, et implique que le système de provisionnement de la SAA comporte un important déficit évalué par notre étude à près de 22.8 millions de dinars, dont 11.7 millions peuvent être imputés à l'utilisation d'une table de mortalité ancienne et 11.1 sont liés à la longévité. Lorsque l'on utilise la table de mortalité de 2009, on obtient une réserve mathématique évaluée à un peu plus de 110 milliards DZD.

## 6. CONCLUSION

La comparaison des résultats de l'estimation des réserves mathématiques laisse apparaître clairement l'apport de la modélisation prospective des taux de mortalité par rapport à la modélisation statique. Dans l'exemple traité, la différence en matière de réserves mathématiques est de 23 %. Ce qui veut dire que dans le cas où la mortalité évolue selon les résultats que nous avons obtenus, l'organisme d'assurance aura besoin de 23 % de plus de réserves pour pouvoir satisfaire son engagement futur envers ses rentiers. Nous pouvons conclure que le déficit est engendré par deux éléments à contributions égales:

- La sur estimation de la mortalité de la population Algérienne qui se traduit par le fait d'utiliser une table non actualisée ;

- Négligence du risque de longévité induite par l'utilisation d'une table de mortalité statique au lieu d'une table prospective ;

Les résultats obtenus nous laissent accentuer l'importance qui doit être accordée au phénomène de longévité lors de l'établissement des différents calculs relatifs aux contrats de rentes viagères. Notons seulement, que l'effet de sous tarification devrait être légèrement plus important que 23% si on considère la décélération de l'espérance de vie projetée auxquelles l'utilisation du modèle de Lee-Carter pourrait donner lieu comme nous l'avons souligné au cours de notre exposé.

Le choix de l'approche prospective comme modèle de provisionnement est une solution nécessaire, bien que insuffisante, pour avoir une meilleure estimation possible de la réserve qui sera réellement nécessaire pour assurer le service d'une assurance de rentes viagères. Il est toutefois nécessaire d'améliorer la qualité de l'ajustement et de la projection en comparant différents modèles de mortalité de sorte à mieux convenir l'évolution future de la mortalité de la population Algérienne. Aussi, il serait opportun d'aller vers la proposition de tables actuarielles basée sur l'expérience de mortalité de la population des rentiers plutôt que d'utiliser les tables de la population globale pour estimer la fonction de survie des rentiers .

## 7. BIBLIOGRAPHIE

BONGAARTS, J. (2004). «Population aging and the rising cost of public pensions». *Population and Development Review*. Vol. 30: 1–23.

BOOTH H., HYNDMAN R. J., TIKLE L., DE JONG P. (2006). « Lee-Carter mortality forecasting: a multi- country comparison of variants and extensions». WP [http://www.webdoc.sub.gwdg.de/ebook/serien/e/monash\\_univ/wp13-06.pdf](http://www.webdoc.sub.gwdg.de/ebook/serien/e/monash_univ/wp13-06.pdf)

BROUHNS N., DENUIT M. (2002) « Risque de longévité et rentes viagères – II. Table de mortalité prospective pour la population belge ». *Belgian Actuarial Bulletin*, Vol. 2, N° 1 : 49-63.

BROUHNS N., DELWARDE A., DENUIT M. (2002). « Méthodes d'élaboration des tables de mortalité prospectives, ou comment tarifier des rentes viagères lorsque la mortalité évolue, In: Tables de mortalité prospectives ». *Prospectieve Sterftetafels, Association Royale des Actuaires Belges, Université Catholique de Louvain*.



CAIRNS A., J., BLAKE D., DOWD K. (2006) « A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration ». *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 73, N°4: 687-718.

CAIRNS A. J., BLAKE D., DOWD K., COUGHLAN G. D., EPSTEIN D., ONG A., BALEVICH I. (2009) «A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States». *North American Actuarial Journal*. Vol. 13, N° 1:1-35.

CANADIAN INSTITUTE OF ACTUARIES. (2014). « Canadian Pensioners' Mortality». *Canadian Institute of Actuaries, Pension Experience Subcommittee – Research Committee Final Report*. Document 214013. (February).

CONTINUONS MORTALITY INVESTIGATION. (2004) « Projecting future mortality: A discussion paper». *Continuons Mortality Investigation. Mortality sub-comitee*. WP, N° 3,

CONSEIL NATIONAL DES ASSURANCES. (2004) « Assurance vie : élaboration d'une table de mortalité Algérienne ». <http://www.cna.dz/Documentation/Travaux-du-CNA/Etudes/Table-de-mortalite>

COALE A. J., DEMENY P.(1966) « *Regional Model Life Tables and Stable Populations*». Princeton, Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

COALE A., GUO G. (1989) « Revised regional model life tables at very low levels of mortality». *Population Index*, Vol. 55: 613-643.

COALE A., KISKER, E.E. (1990) « Defects in data on old age mortality in the United States: New procedures for calculating approximately accurate mortality schedules and life tables at the highest ages». *Asian and Pacific Population Forum*, Vol.4: 1-31.

CURRIE I.D. (2006) «Smoothing and forecasting mortality rates with P-splines». *Talk given at the Institute of Actuaries*, June 2006.  
<http://www.macs.hw.ac.uk/~iain/research/talks/Mortality.pdf>

DEBONNEUIL E., PLANCHET F., LOISEL S. (2015). « Do actuaries believe in longevity deceleration? ». *Cahiers de l'ISFA*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01219270>

DEVOLDER P., GILLES F. (2006) « Support de cours d'ASSURANCE VIE». *Institut des sciences actuarielles. Université catholique de Louvaine (UCL)*. 2006 – 2007.

DENUIT M., GODERNIAUX A-C. (2005). « Closing and projecting lifetables using log-linear models». *Bulletin de l'Association Suisse des Actuaires*, sous presse

GOMPERTZ B. (1825) « On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. Vol. 115: 513-583.

HESS C. (2000) « *Méthodes Actuarielles de l'assurance vie* ». Collection Gestion. Série Politique générale, Finance et Marketing. Edition ECONOMICA.

INSTITUTE OF ACTUARIES AND FACULTY OF ACTUARIES (1990). « Continuous Mortality Investigation Report CMIR-10».

[www.actuaries.org.uk/system/files/documents/pdf/cm10all.pdf](http://www.actuaries.org.uk/system/files/documents/pdf/cm10all.pdf)

JUSTENS D., HULIN L. (2000) «Théories actuarielles». *Editions du CEFAL*.

KAMEGA A. (2011). « Outils théoriques et opérationnels adaptés au contexte de l'assurance vie en Afrique subsaharienne francophone-Analyse et mesure des risques liés à la mortalité ». *Doctoral dissertation, Université Claude Bernard-Lyon I*.

KAMEGA A., PLANCHET F. (2011) « Analyse et comparaison des populations générale et assurée en Afrique subsaharienne francophone pour anticiper la mortalité future ». *Cahiers de recherche de l'ISFA*, (2138), 38.

LEE R. D. CARTER L. R. (1992) «Modeling and forecasting U. S. Mortality». *Journal of American statistical association*, Vol. 87, N°419: 659 – 671.

LI N., LEE R., TULJAPURKAR S. (2004) «Using the Lee-Carter Method to Forecast Mortality for Populations with Limited Data». *International Statistical Review*, Vol. 72, N°1:19-36.

MAGIS C., DENUIT M., WALHIN J.F. (2004) «Une proposition de tables prospectives pour le marché belge de rentes». *Belgian Actuarial Bulletin*, Vol 4. N° 1: 23-43.

MAKEHAM, W. M. (1867). « On the Law of Mortality». *Journal of the Institute of Actuaries*. Vol. 13, N° 6:325-358. (JULY).

OFFICE NATIONAL DES STATISTIQUES. (2015) « Démographie Algérienne 2014 ». *Bulletin statistique*, N° 690 :

[http://www.ons.dz/IMG/pdf/Demographie\\_algerienne\\_2014.pdf](http://www.ons.dz/IMG/pdf/Demographie_algerienne_2014.pdf)

PETAUTON P. (2003) « *Théorie et pratique de l'assurance vie* ». 3° édition. Edition DUNOD. Paris.

PLANCHET F. (2009). « Risque de longévité et détermination du besoin en capital : travaux en cours ». *Université Jean Moulin - Lyon III*,

PLANCHET F., FAUCILLON L., JUILLARD M. (2006) « Quantification du risque systématique de mortalité pour un régime de rentes en cours de service». *Assurance et gestion des risques*, Vol 74, N°3.

QUASHIE A., DENUIT M. (2005) «Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges». *Institut des Sciences Actuarielles & Institut de statistique. Université Catholique de Louvain, Belgique*, Working paper, N° WP04-13.

[https://www.uclouvain.be/cps/ucl/doc/actu/documents/Quashie\\_Denuit\\_BSAA\(1\).pdf](https://www.uclouvain.be/cps/ucl/doc/actu/documents/Quashie_Denuit_BSAA(1).pdf)

RENSHAW A., HABERMAN S. (2006) « A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors». *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 38, N° 3; 556-570.

SOCIETY OF ACTUARIES (1995). « 1994 Group annuity mortality table and 1994 group annuity reserving table». *Transactions of society of actuaries*, Vol. 47.

TOSETTI A., WESS F. POINCELIN T. (2003) « *Les outils de l'actuariat vie*». Editions ECONOMICA.

WILMOTH R. J. (1993) « Computational methods for fitting and extrapolating the Lee-Carter model of mortality change». *Technical report, Department of Demography, University of California, Berkeley*.

UNITED NATIONS. (2015). «World Population Prospects Key Findings and Advance: the 2015 revision». *United Nations Organization, Department of Economic and Social Affairs. Population Division. New York. USA*.

## 8.1 Mise en forme des données sous format d'un programme lineaire

[illegible]

The screenshot displays an Excel spreadsheet with a Solver Parameters dialog box open. The dialog box is titled "Paramètres du solveur" and shows the following settings:

- Cellule ciblée à définir: **\$A\$150**
- Égale à: **0**
- Cellules variables: **\$A\$150:\$A\$169**
- Contraintes:
  - $\$A\$167 = 0$
  - $\$A\$168 = 1$
  - $\$A\$150:\$A\$169 \geq 0$
- Options: The "Options" tab is selected, showing buttons for "Résoudre", "Fermer", "Ajouter", "Modifier", "Supprimer", "Options", "Étiquette", and "Aide".

The spreadsheet background shows a table with columns for years (1977-2008) and rows for "Somme Kappa", "Somme Beta", and "Somme erreur". A red dashed line connects the "Somme Kappa" row to the "Somme Beta" row, and a green dashed line connects the "Somme Beta" row to the "Somme erreur" row.

### 8.3 Résultats :

[illegible]